令和５年度　お茶の水女子大学　理学部　情報科学科
後期日程　論述試験　試験問題

1

ある団体が 10 人で 1 泊 2 日の旅行に行く予定を立てている．その 10 人 (アルファベット順に，A〜J) の人間関係をまとめると，次のようである．

- 仲良しグループは，(A, B, C, D), (E, F, G), (H, I, J) の 3 つ．
- 敵対関係のペアは，(D, E), (D, F), (D, H), (E, J), (F, J), (F, H), (G, J) の 7 つ．

旅館で 2 部屋に分かれて宿泊するための部屋割りの案を，次の 2 つの場合についてそれぞれ考えよ．

(1) 各部屋の定員が 5 名の場合

(2) 各部屋の定員が 6 名の場合

ただし，以下の条件を満たすように論述すること．

- できるだけ楽しい旅行になるような部屋割りにしたい．あなたの考える「楽しい」の定義を，人間関係 (仲良しグループおよび敵対関係のペア) の観点から述べること．
- 部屋割りの案がどれだけ「楽しい」の定義を満たしているかを，数値で評価するための基準を設定すること．(例えば，仲の良いペアが同室なら「+2」，敵対関係のペアが同室なら「−1」など．) 評価値が高いほど，よい部屋割りであるとする．
- 評価値の高い部屋割りの案を求めよ．ただし，最大の評価値であることを保証する必要はない．また，どのようにその案を見つけたかを述べること．

2

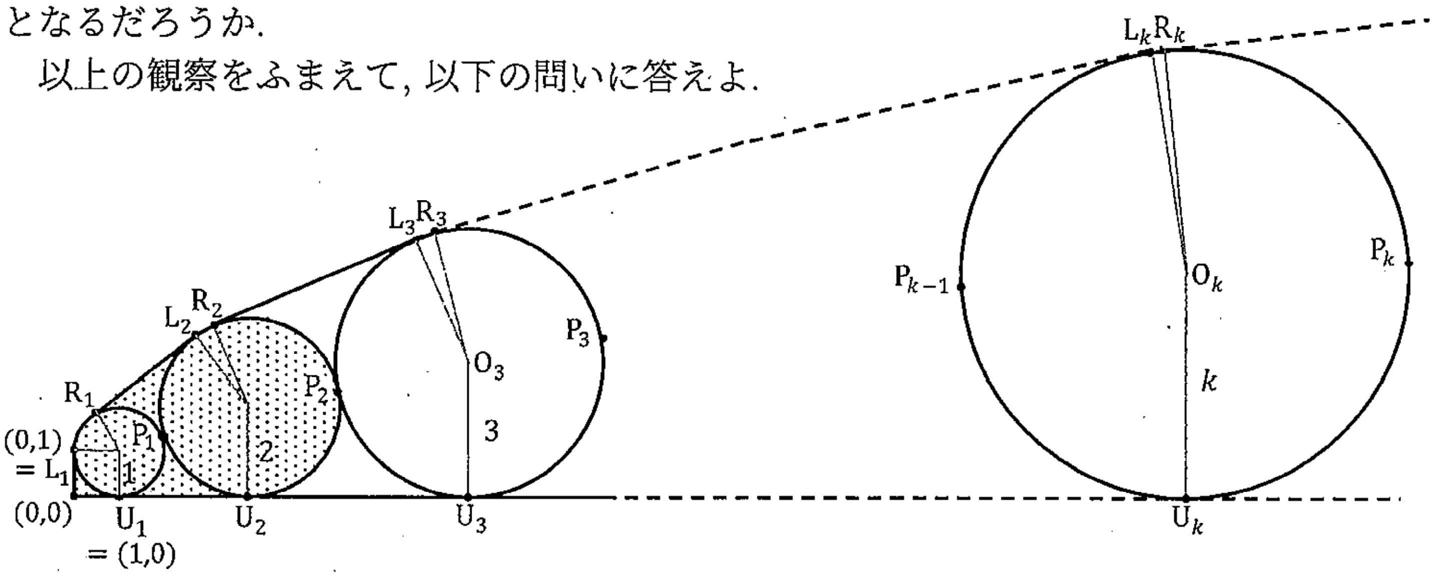
xy 平面の第 1 象限上に, x 軸と y 軸に共に接するように半径 1 の円 C_1 を置き, 円 C_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ と x 軸に共に接するように半径 $i+1$ の円 C_{i+1} を x 軸正の方向へ順に並べて置くことを考える. 下図がその概要である. 円 C_i の中心を O_i, O_i から x 軸へ下ろした垂線と x 軸との交点を U_i とする. 例えば, U_1 の座標は $(1, 0)$ となる.

円 C_i と円 C_{i+1} の接点を確認しよう. 円 C_i と円 C_{i+1} の接点を P_i とすると, P_1 の x 座標は 2 よりやや小さくなる. 同様に, U_2 の座標も $(4, 0)$ よりもやや原点寄りになる. これは P_1 が O_1 の真横ではなく, O_1 と O_2 を結んだ直線上に存在することからイメージすることができるだろう.

円 C_i と円 C_{i+1} は x 軸以外にも共通する接線を二つ持つ. そのうち, P_i を通らない接線を図に加筆している. この直線と円 C_i との接点を R_i, 円 C_{i+1} との接点を L_{i+1} と置こう. 例えば, 円 C_1 と円 C_2 は R_1 と L_2 を通る直線を共通する接線として持っている. また, 便宜上 $\mathrm{R}_0 = \mathrm{L}_1 = (0, 1)$ とする.

このような接する円の列は無限に x 軸の正の方向へと連ねることができる. ここで, 円 C_k までを描いた時に x 軸, y 軸, $i \leqq k$ である全ての弧 $\mathrm{L}_i\mathrm{R}_i$ と直線 $\mathrm{R}_{i-1}\mathrm{L}_i$, そして弧 $\mathrm{U}_k\mathrm{P}_k\mathrm{R}_k$ によって囲まれる領域の面積を S_k とする. 例えば, 下図の網掛けをしている部分の面積が S_2 となる. このとき, 円 C_1 から円 C_k までの円の面積の合計は S_k に対しどのような比率となるだろうか.

以上の観察をふまえて, 以下の問いに答えよ.



(1) U_2 と U_3 の距離を求めよ.

(2) $i \geqq 1$ において, L_i の x 座標が R_i の x 座標よりも小さくなることを証明せよ.

(3) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \pi i^2 \right) / S_k$ をはさみうちの原理を用いて求めるために, 扇形 $\mathrm{R}_i\mathrm{O}_i\mathrm{L}_i$ の面積を少し大きな値で近似したい. 「$\theta < \pi/2$ ならば $\sin\theta \leqq \theta \leqq 2\sin\theta$」, 「$n \geqq 1$ ならば $\dfrac{n^2}{4n^2-1} < 1$」等を利用し, 扇形 $\mathrm{R}_i\mathrm{O}_i\mathrm{L}_i$ の面積を T_i として $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} T_i$ の近似値を求めよ.

(4) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \pi i^2 \right) / S_k$ を求めよ.